مقایسه روش مشخصه و تفاضل محدود صریح در روندیابی جریان و محاسبه پروفیل سطح آب در یک کانال باز با جریان غیردایمی

ایمان سبززاده[1]، رحیم علیزاده[2]

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران- مهندسی آب، دانشگاه صنعت آب و برق (شهید عباسپور)[1]

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران- سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه قم[2]

imansabzzadeh@yahoo.com

چکیده

معادلات حاکم بر جریان های غیر دایمی در کانال‌های باز به معادلات سنت- ونانت معروف هستند. این معادلات به شکل معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی و از نوع هذلولوی هستند که به طور تحلیلی قابل حل نیستند. بنابراین برای حل این معادلات از روش های عددی استفاده می شود. در این مقاله عمق و سرعت و هیدروگراف جریان در یک کانال مستطیلی با جریان متغیر تدریجی غیردائمی از روش مشخصه و روش تفاضل محدود صریح با هم مقایسه شده است. این کار با برنامه‌نویسی این دو روش در محیط MATLAB امکان‌پذیر شد. مقایسه برای گام‌های زمانی و مکانی مختلف انجام شده است. از لحاظ زمان اجرا روش مشخصه پروفیل سطح را در زمان بیشتری محاسبه می‌کند. نزدیک بودن عدد کورانت به 1 نتایج این دو روش را یکدیگر نزدیک کرده است. حساسیت روش مشخصه نسبت به گام زمانی کمتر از روش تفاضل محدود صریح بود. مقادیر سرعت روش مشخصه قرابت بیشتری با نتایج تفاضل محدود صریح، نسبت به نتایج عمق، دارند. نتایج نشان می‌دهد نمودارهای سرعت، عمق روش مشخصه بالاتر از نمودارهای تفاضل محدود قرار می‌گیرند.

کلمات کلیدی: جریان غیردایمی، معادلات سنت- ونانت، روش مشخصه و تفاضل محدود صریح.

مقدمه

بسیاری پدیده‌هایی که در یک کانال باز اتفاق می‌افتد به صورت یک جریان غیردایمی است [۱]. معادلات حاکم بر جریان های غیردایمی در کانال‌های باز، معادلات پیوستگی و مومنتم میباشند و به معادلات سنت–ونانت معروف هستند. این معادلات به شکل معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی هذلولوی می باشند که به طور تحلیلی قابل حل نیستند.

تلاش‌های زیادی برای حل معادلات سنت–ونانت انجام گرفته است. از جمله روش‌های حل عددی که برای این معادلات ارائه شده است می‌توان به روش خطوط مشخصه و روش‌های تفاضل محدود صریح و ضمنی اشاره کرد. روش مشخصه معادلات دیفرانسیل جزیی را به معمولی تبدیل می‌کند سپس از تفاضلات محدود برای تفکیک این معادلات استفاده می‌کند.در روش‌های تفاضل محدود به جای مشتق‌های جزیی از تفاضل‌های محدود استفاده می‌شود [۲]. به این صورت مشتقات جزیی با تفاضل‌های محدود تقریب زده می‌شود. در این مقاله نتایج روش مشخصه و روش تفاضل محدود صریح با هم مقایسه شده است.

معادلات جریان

معادلات حاکم بر جریان معادلات پیوستگی و اندازه حرکت (رابطه (۱) و (۲))هستند که به معادلات سنت– ونانت معروف هستند.

$$\frac{\partial y}{\partial t}+D_h\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad (۱)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}=(S_0-S_f) \qquad (۲)$$

در روابط بالا V سرعت جریان، y عمق جریان، Dh=A/T عمق هیدرولیکی، A سطح مقطع جریان، T عرض سطح آب، S0 شیب کف کانال، S_f شیب خط گرادیان انرژی، x مسافت در طول کانال، t زمان و g شتاب جاذبه ثقل است. برای حل معادلات بالا روش تحلیلی خاصی، به جز برای حالت‌های ساده شده آن‌ها، وجود ندارد [۳].

معادلات روش مشخصه

با توجه به رابطه‌های پیوستگی و مومنتم محاسبات زیر انجام می‌شود تا معادلات مشخصه بدست آیند.

$$c^2=gh\rightarrow d(c^2)=2cdc=d(gh) \qquad (۳)$$

معادلات پیوستگی و مومنتم بر حسب c به صورت هستند:

$$c\frac{\partial V}{\partial x}+2V\frac{\partial c}{\partial t}=0 \qquad (٤)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+2c\frac{\partial c}{\partial x}=g(S_f-S_0) \qquad (۵)$$

با جمع و تفریق دو رابطه (٤) و (۵) بدست می‌آید:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(V+c)\frac{\partial}{\partial x}\right](V+2c)=g(S_f-S_0) \qquad (٦)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(V-c)\frac{\partial}{\partial x}\right](V-2c)=g(S_f-S_0) \qquad (٧)$$

با توجه به روابط بالا:

$$\frac{d}{dt}(V+2c)=g(S_f-S_0)\ ,\ \ \frac{d}{dt}(V-2c)=g(S_f-S_0) \qquad (٨)$$

$$(V+c)=\frac{dx}{dt},\quad (V-c)=\frac{dx}{dt} \qquad (٩)$$

رابطه (٩) منحنی‌های مشخصه مثبت و منفی را نشان می‌دهند.

طرح تفاضل محدود صریح

تفاضل محدود یکی از روش‌های عددی کامل حل معادلات سنت- ونانت است. با توجه اینکه معادلات سنت- ونانت از نوع دیفرانسیل جزیی غیرخطی هستند، حل معادلات دیفرانسیل جزیی یکی از چالش‌های روش‌های عـددی اسـت. در روش‌های تفاضل محدود هر نقطه در هر شبکه به وسیله دو رابطه تفاضل محدود معرفی می‌شود سپس این روبط به کمک طرح عددی صریح یا ضمنی حل می‌شوند. روش‌های صریح روابط را نقطه به نقطه در مکان و زمان و در طول هـر خـط زمان حل می‌کنند تا زمانی که همه مجهولات در آن زمان محاسبه شوند سپس سراغ زمان بعدی می‌روند. روش‌های ضمنی همه نقاط را در یک زمان و بطور همزمان حل می‌کنند سپس سراغ زمـان بعـدی مـی‌رونـد. در روش‌هـای عـددی وقتـی تغییرات سریعی در زمان یا مکان رخ دهد دچار واگرایی می‌شوند و به یک جواب نمـی‌رسـند[٢].ایـن مـورد بـرای طـرح تفاضل صریح در این مقاله در گام‌زمانی بیشتر از ٨ ثانیه رخ داد. در روش تفاضل محدود صریح روابـط بـه صـورت زیـر تفکیک می‌شوند[٤].

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{y_{i+1}^{n}-y_{i}^{n}}{\Delta x} \qquad (١٠)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{Q_{i+1}^{n}-Q_{i}^{n}}{\Delta x} \qquad (١١)$$

بعد از جایگذاری در معادله پیوستگی و مومنتم عمق جریان و سرعت از رابطه‌های زیر بدست می‌آید [٣]:

$$y_i^{n+1}=y_i^n+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[V_i^n\left(y_{i-1}^n-y_{i+1}^n\right)+y_i^n\left(V_{i-1}^n-V_{i+1}^n\right)\right] \quad (۱۲)$$

$$\beta=[y_i^n+\frac{\Delta t}{2\Delta x}V_i^n(V_{i-1}^n-V_{i+1}^n)+\frac{g\Delta t}{2\Delta x}\left(y_{i-1}^n-y_{i+1}^n\right)+g\Delta tS_f$$

$$\Gamma=\frac{\left(Rh_i^{n+1}\right)^{4/3}}{n^2g\Delta t} \quad (۱۳)$$

$$V_i^{n+1}=\frac{1}{2}\left[-\Gamma+(\Gamma^2+4\Gamma\beta)^{1/2}\right]$$

پایداری روش‌ها

برای پایداری دو روش مشخصه و تفاضل محدود صریح باید عدد کورانت کمتر از ۱ باشد[۵]. این شرط گام زمانی و مکانی را کنترل می‌کند. رابطه عدد کورانت به صورت زیر است:

$$C_n=\frac{V+\sqrt{gD_h}}{\Delta x/\Delta t} \quad (۱٤)$$

رابطه ۱۰ نشان می دهد که گام زمانی به فاصله مکانی شبکه، سرعت جریان و عمق جریان است، بستگی دارد. چون عمق آب و سرعت جریان ممکن است در طی محاسبات به میزان قابل توجهی تغییر نمایند، لازم است جهت داشتن پایداری، گام زمانی محاسبات کاسته شود. گام زمانی باید طوری باشد که مقدار C_n هر چه به واحد نزدیک تر باشد. اگر مقدار آن به میزان قابل ملاحظه ای کمتر از واحد باشد، برای بهبود دقت و جلوگیری ار ایجاد پرش ها و امواج تیز، باید گام زمانی را افزایش داد.

شرح مسئله

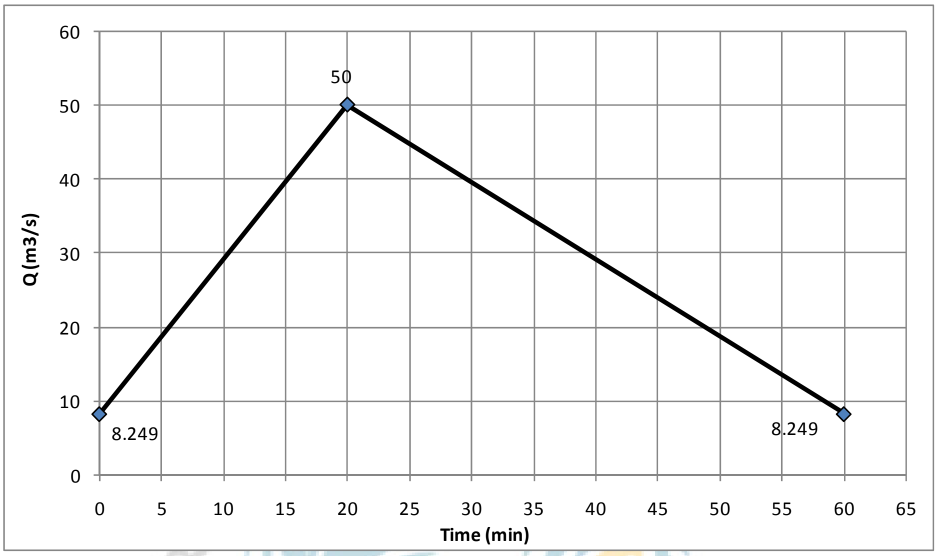
هدف روندیابی جریان و محاسبه عمق آن در یک کانال مستطیلی به عرض ۵ متر و طول ۳ کیلومتراست. شیب طولی کانال ۰/۰۰۱ و ضریب مانینگ برابر ۰/۰۱۵ است. سایر شرایط کانال به این شرح است.

شرایط اولیه: شرط اولیه حالت دایمی کانال با عمق h_n=1.2 m در زمان t=0 min است.

شرط مرزی بالادست: شرط مرزی بالادست همان تغییرات شرح داده شده دبی در صورت مسئله است. نمودار تغییرات دبی با زمان در ابتدای کانال در شکل (۱) نشان داده شده است.

در بالادست برای جریان زیربحرانی برای سرعت و عمق از هر دو روش مشخصه و تفاصل محدود صریح یـک رابطـه از مشخصه یا تفاضل محدود و یک رابطه نیز از دبی وجود دارد و با وجود دو معادله و دو مجهول، عمق و سرعت به دست می آیند.

کل ۱: نمودارتغییراتدبیبازماندرابتدایکانال (شرطمرزیبالادست)



شرط مرزی پایین‌دست: شرط مرزی پایین دست رابطه مانینگ است. در پایین دست برای جریان زیر بحرانـی و از روش مشخصه برای سرعت و عمق یک رابطه از مشخصه و رابطه مانینگ بر قرار است.رابطه زیر شرط مـرزی پـایین دسـت از رابطه مانینگ بعد از ساده‌سازی است. با داشتن این دو رابطه مجهولات یعنی عمق و سرعت بدست می‌آیند.

برای روش تفاضل صریح نیز در بالادست رابطه‌های زیر برقرار است:

$$H_i^{n+1}=H_i^n+\frac{\Delta t}{\Delta x}[U_i^n(H_{i-1}^n-H_i^n)+H_i^n(U_{i-1}^n-U_i^n)]$$

$$U_i^{n+1}=\frac{1}{n}\left(Rh_i^{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}(S_f)^{1/2}$$

$$Q_i^{n+1}=U_i^{n+1}A_i^{n+1}$$

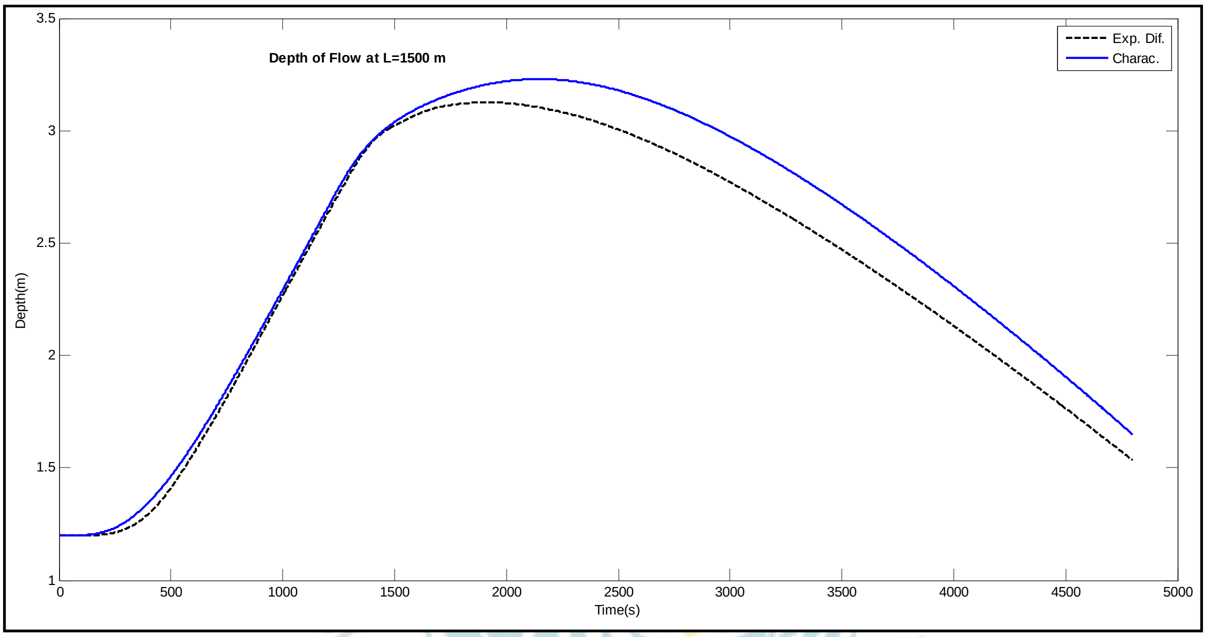
گام زمانی و مکانی

محاسبات برای گام‌های زمانی و مکانی مختلفی انجام شد. به دلیل حجم زیاد خروجی‌ها امکان ارائه همه نتـایج میسـر نبود. در این نوشتار نتایج گام زمانی ۲ ثانیه و گام مکانی ۳۰۰ متر آمده اسـت. ایـن مقـادیر بـر اسـاس رابطـه کورانـت و همچنین پایدار بودن روش‌ها انتخاب شده‌اند.

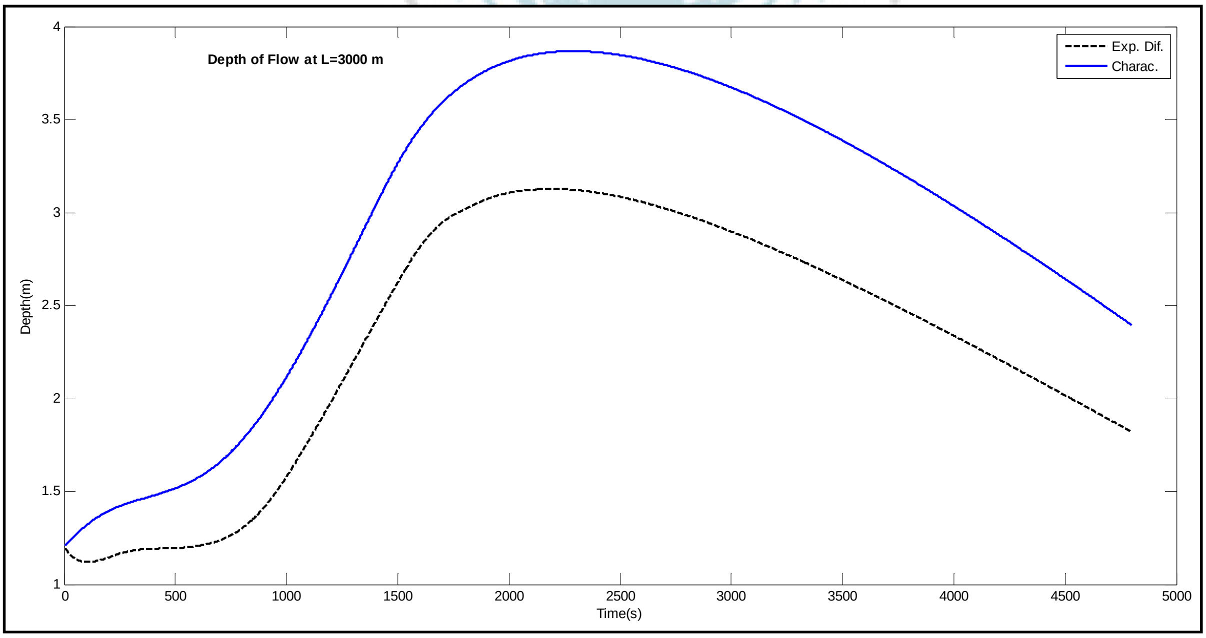
نتایج

در شکل‌های(۲) تا (۷) نتایج عمق و هیدروگراف جریان حاصل از روش‌های مشخصه و تفاضل محدود صریح در وسط (L=1500 m) و انتهای کانال (L=3000) ارائه شده است.

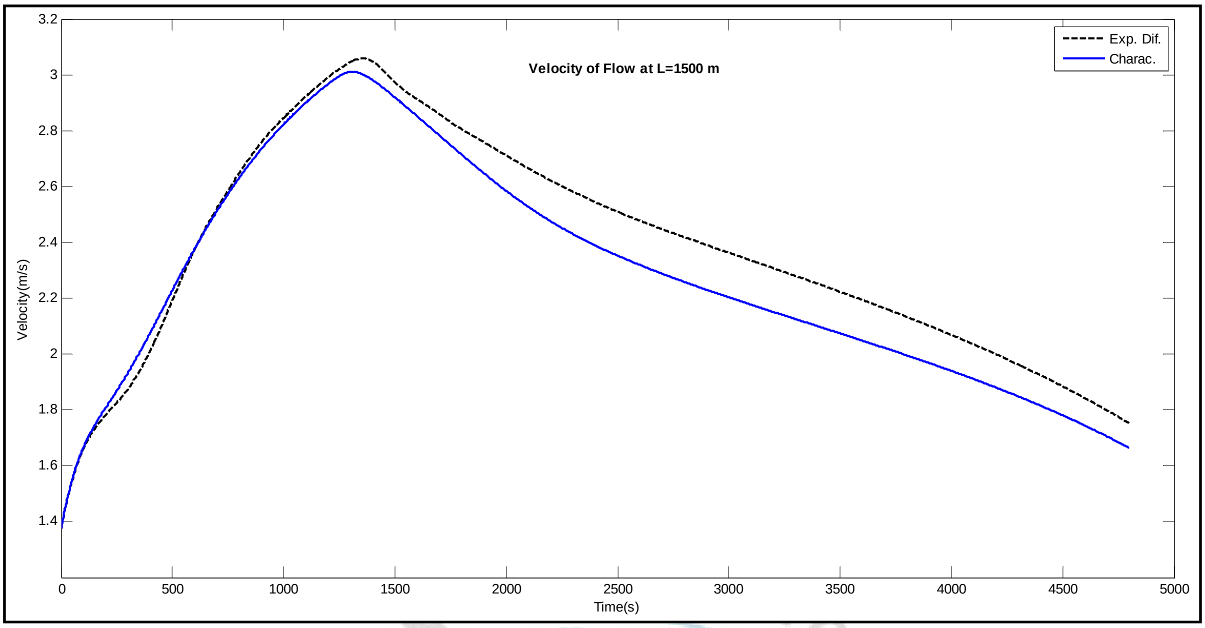
شکل ۲:نتایجروشمشخصهوتفاضلمحدودصریحبرایعمقدروسطکانال



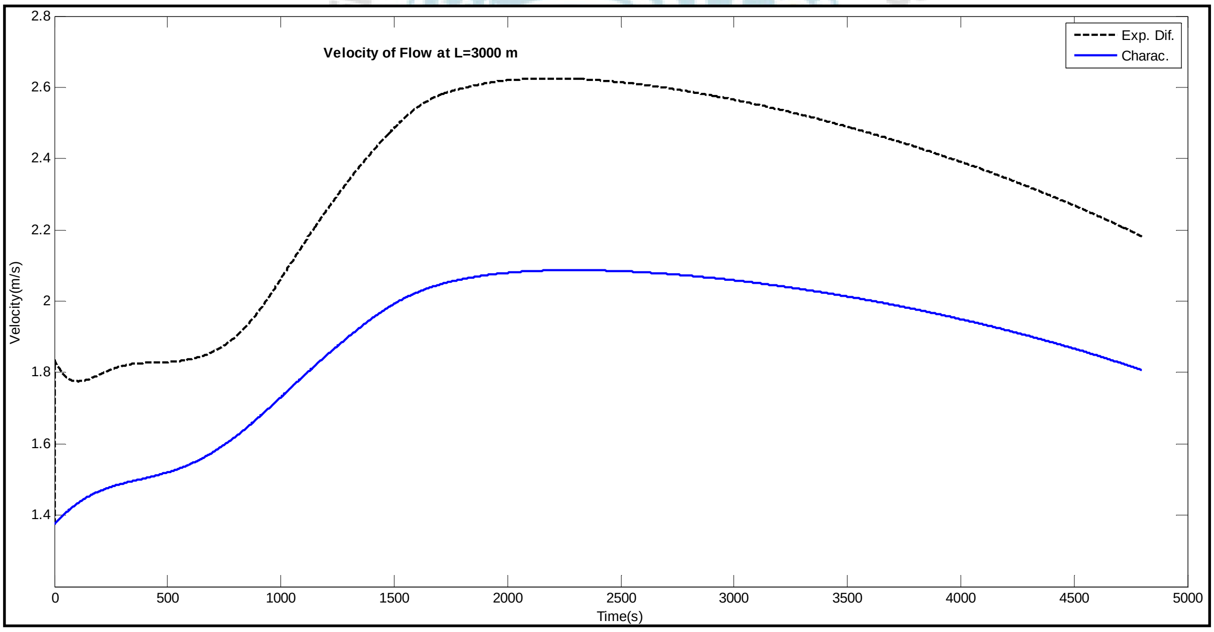
شکل ۳: نتایج روش مشخصه و تفاضل محدود صریح برای عمق در انتهای کانال



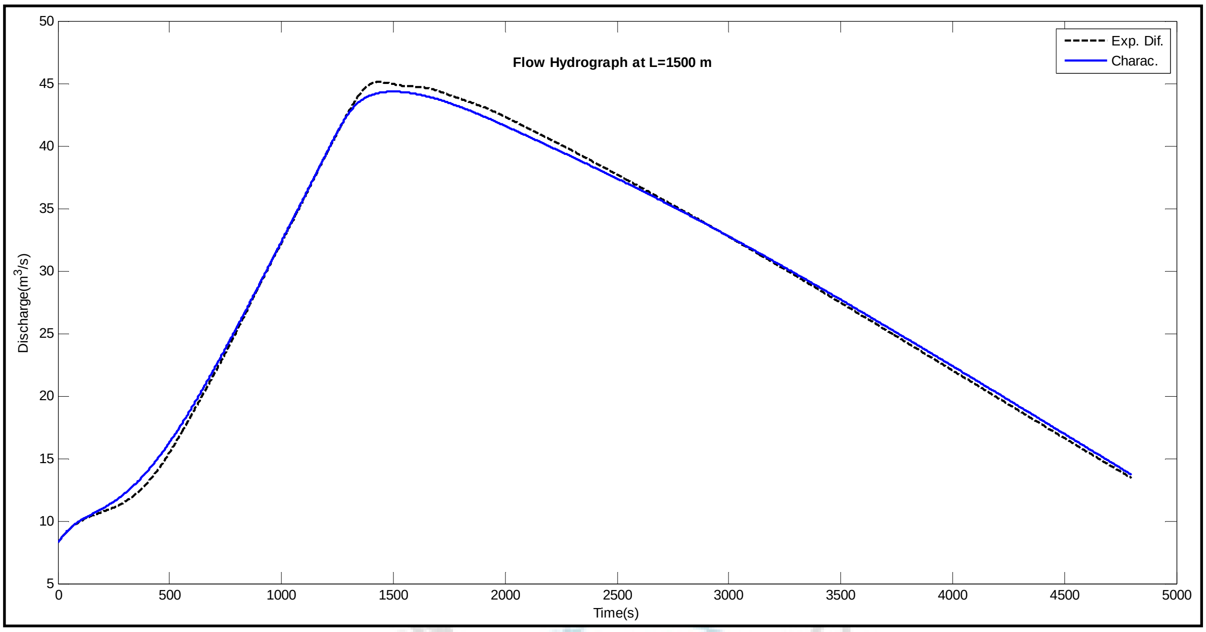
شکل ٤: نتایج روش مشخصه و تفاضل محدود صریح برای سرعت در وسط کانال



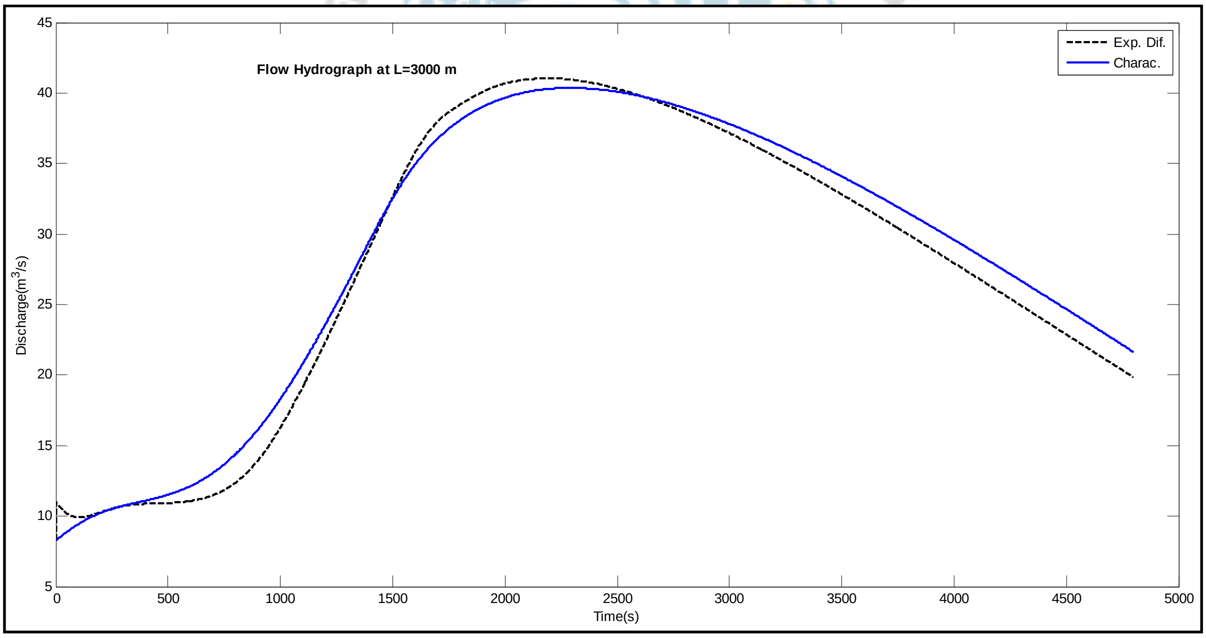
شکل ٥: نتایج روش مشخصه و تفاضل محدود صریح برای سرعت در انتهای کانال



شکل ٦: هیدروگراف حاصل از روش مشخصه و تفاضل محدود صریح در وسط کانال



شکل ۷: هیدروگراف حاصل از روش مشخصه و تفاضل محدود صریح در انتهای کانال



بحث روی نتایج

مقادیر سرعت روش مشخصه قرابت بیشتری با نتایج تفاضل محدود صریح، نسبت به نتایج عمق، دارند. با نزدیک شدن به انتهای کانال نتیجه این دو روش از هم فاصله گرفته است. نمودارهای شکل (۳) و (۵) این مسئله را نشان می‌دهد. نتایج عمق و سرعت روش مشخصه بیشتر از روش تفاضل محدود بدست آمده است. بررسی مطالعه مثال‌های دیگر که روش مشخصه را با روش های تفاضل ضمنی صریح و غیرصریح مقایسه کرده اند، نشان می دهد که روش مشخصه

مقادیر بیشتری را نشان می دهد و در این مثال نیز به همین گونه است. مقدار هیدروگراف حاصل از دو روش بسیار به هم نزدیک است. نقطه ماکزیمم نمودارها خیلی به هم نزدیک است ولی در مجموع ماکزیمم‌های روش مشخصه دیرتر اتفاق افتاده‌اند. زمان اجرای روش مشخصه بسیار بیشتر از روش تفاضل محدود بود. زیاد بودن محاسبات مشخصه علت این امر است. حساسیت روش مشخصه به گام‌های زمانی و مکانی کمتر از روش تفاضل محدود صریح است. به طور مثال برای گام زمانی ۸ ثانیه و مکانی ۲۰۰ متر روش تفاضل محدود ناپایدار می‌شد در حالی که این مشکل در روش مشخصه وجود نداشت.

Bedient and Huber (1988) عنوان کرده‌اند که روش مشخصه یک درون‌یابی دشوار و سخت را به همراه دارد که در مقایسه با روش‌های تفاضل محدود دقتی را به نتایج اضافه نمی‌کند [۲]. روش مشخصه نسبت به روش تفاضل محدود روش قدیمی‌تری نیز است[٦] و انتظار می‌رود نتایج تفاضل محدود به واقعیت نزدیک‌تر باشد.

مرجع‌ها

[1] R. H. French, "*Open-Channel Hydraulic*", International Edition, McGraw-Hill, 1987.705.

[2] P. B. Bedient and W. C. Huber, "*Hydrology and Floodplain Analysis*", Addison-Wesley, 1988, 650.

[۳] والتر اچ گراف، ترجمه محمدی. م.ع، ۱۳۸۲، هیدرولیک جریان در کانال‌ها و رودخانه‌ها، انتشارت دانشگاه ارومیه، ایران، ٦٥٦ ص.

[4] M. H. Chaudhry, "*Open-Channel Flow*", Second Edition, Springer, 2008, 523.

[۵] حامدی، م.ح، ۱۳۸۲، هیدرولیک مجاری باز (جلد دوم)، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ایران

[6] F. M. Henderson, "*Open Channel Flow*", Macmillan Publishing Co, 1966, 522.

[۷] حسین‌نژاددوین، علیرضا و بهزاد فیروزی؛ «*حل عددی معادلات حاکم بر جریان‌های غیردایمی به کمک الگوری ضمنی پریسمن و الگوری عددی مک‌کورمک*»، پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، ۱۳۸۹، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.